

## ÍNDICE DE MATERIAS DE LÓGICA DE ENUNCIADOS

La lógica clásica elemental se divide en lógica de enunciados y lógica de predicados. Este apartado está dedicado a el primer tipo de lógica.

1. Introducción a la lógica clásica elemental: lógica de enunciados y de predicados.

2. Enunciados y conectores

3. Tipos de deducción: la deducción directa y la indirecta o reducción al absurdo.

4. Valores de verdad de los enunciados: las tablas de verdad.

5. Reglas elementales del cálculo de enunciados (juntores).

6. Reglas derivadas del cálculo de juntores.

7. El método de las tablas semánticas o árboles lógicos.

## INTRODUCCIÓN

La lógica elemental se divide en:

lógica de enunciados

lógica de predicados

Ambas utilizan un lenguaje propio artificial o formalización de un lenguaje natural que permite analizar las proposiciones del lenguaje natural.

El cometido de la lógica clásica elemental es determinar si nuestros razonamientos, independientemente de su contenido, son correctos o incorrectos.

Por razonamientos (o argumentos) se entiende un conjunto de proposiciones de tal manera que, una de las cuales, denominada **conclusión** del razonamiento, pueda presentarse como consecuencia de las demás proposiciones, llamadas **premisas** del razonamiento.

En la **lógica de enunciados** la unidad mínima es **el enunciado**, es decir, un segmento lingüístico que tiene sentido completo por sí mismo:

*Esta fiesta es muy divertida*

*Esta fiesta es muy divertida y la música es muy buena*

Para que un enunciado sea tal, tiene que poder atribuírsele valores de **verdad o falsedad**.

*En el caso de las dos oraciones anteriores, la verdad o falsedad habrá de determinarse empíricamente, comprobando si, de hecho, la fiesta es divertida y buena la música. En este caso, además, la dificultad es aún mayor ya que se trata de una afirmación subjetiva.*

La lógica de enunciados (o lógica proposicional), trata del estudio de la composición de enunciados mediante conectores (y, o, si...entonces, etc.) y se fundamenta en el **principio de bivalencia**, según el cual, todo enunciado es verdadero o falso, pero nunca ambas cosas a la vez..

Podemos decir, por lo tanto, que la lógica de enunciados se dedica a formalizar las proposiciones del lenguaje natural en un lenguaje simbólico y a definir los conectores, estudiando las leyes de combinación o deducción de los enunciados que las contienen.

En la **lógica de predicados** se formaliza y estudia la oración atendiendo a los dos términos que la componen: **el sujeto y el predicado**.

## LOS ENUNCIADOS

Ya hemos visto que la unidad mínima de este tipo de lógica es el enunciado o segmento lingüístico con sentido completo.

Los enunciados pueden ser:

**1. Simples o atómicos:** no tienen conectores de ninguna clase

*Ejemplos: El Tajo es un río.*

*En esta fiesta hay 20 personas*

**2. Compuestos o moleculares:** utilizan conectores que unen varios segmentos lingüísticos:

*Ejemplo: En esta fiesta hay 20 personas y poca cerveza*

**LOS CONECTORES** de los enunciados moleculares son:

- **NEGACIÓN:** se representa por el símbolo  $\sim$  ó  $\neg$ .  
Así, el enunciado  $\neg p$  se leería como: "no p"; "no es cierto que p"; "ni p".  
El enunciado *no es verdad que no sea puntual* se formularía:  $\neg\neg p$ , donde **p** es la variable que representa a *ser puntual*.
- **CONJUNCIÓN:** su símbolo es una v mayúscula al revés: (podemos utilizar también el signo **&**)  
El enunciado : *viajo a la India y a China* se formularía: **i & c** , donde **i** es la variable que representa a *viajar a India* y **c** es la variable que representa a *viajar a China*.  
**p & c & r** se leerá: "*p y c y r*" (*p y también c, y además r*).
- **DISYUNCIÓN:** Su símbolo es **V** (como la inicial de la disyunción latina "vel" y se traduce por *o*).  
El enunciado : *Llegaré en tren o en avión* se formularía: **t V a**, donde **t** es la variable que representa *llegar en tren* y **a** la variable que representa *llegar en avión*.
- **CONDICIONAL O IMPLICADOR:** Su símbolo es **->** y se traduce por: *si...entonces*.  
El enunciado: *si vienes pronto, iremos al cine* se formularía: **p -->c** , donde **p** es la variable que representa al antecedente *venir pronto* y **c** a la variable *ir al cine*.  
**p --> ( q --> r )** se leerá como: *si p entonces q entonces r* (**p** implica **q** entonces **r**).
- **BICONDICIONAL O COIMPLICADOR:** Su símbolo es **<->** y se lee: *si y sólo si* o también: *cuando y sólo cuando*.  
El enunciado *si y sólo si respetas el deber eres moral* se formularía: **r <-> m**, donde **r** es la variable que representa *respetar el deber* y **m** la variable *ser moral*.

## EJERCICIOS SOBRE FORMALIZACIÓN DE ENUNCIADOS

### 1. Formaliza las siguientes proposiciones:

- a. No es cierto que no me guste bailar
- b. Me gusta bailar y leer libros de ciencia ficción.

- c. Si los gatos de mi hermana no soltaran tanto pelo me gustaría acariciarlos.
- d. Si y sólo si viera un marciano con mis propios ojos, creería que hay vida extraterrestre.
- e. Una de dos: o salgo a dar un paseo, o me pongo a estudiar como un energúmeno.
- f. Si los elefantes volaran o supieran tocar el acordeón, pensaría que estoy como una regadera y dejaría que me internaran en un psiquiátrico.
- g. Prefiero ir de vacaciones o estar sin hacer nada si tengo tiempo para ello y no tengo que ir a trabajar.

Solución:

- a. [**b** me gusta bailar].  $\neg(\neg b)$
- b. [**b** me gusta bailar. **c** me gusta leer libros de ciencia ficción]. **b & c**
- c. [**g** los gatos de mi hermana sueltan pelo. **a** me gusta acariciar los gatos ].  $\neg g \rightarrow a$
- d. [**m** ver un marciano con mis propios ojos. **e** creer en los extraterrestres ].  $m \leftrightarrow e$
- e. [**p** salir a dar un paseo. **e** estudiar como un energúmeno].  $p \vee e$
- f. [**v** los elefantes vuelan. **t** los elefantes tocan el acordeón. **l** estar loco. **p** internar en un psiquiátrico ].  $(v \vee t) \rightarrow (l \& p)$
- g. [**v** ir de vacaciones. **n** no hacer nada. **t** tener tiempo. **i** ir a trabajar ].  $(t \& \neg i) \rightarrow (v \vee n)$

## 2. Formaliza la siguiente proposición:

a. Si tuvieran que justificarse ciertos hechos por su enorme tradición entonces, si estos hechos son inofensivos y respetan a todo ser viviente y al medio ambiente, no habría ningún problema. Pero si los hechos son bárbaros o no respetuosos con los seres vivientes o el medio ambiente, entonces habría que dejar de justificarlos o no podríamos considerarnos dignos de nuestro tiempo.

Solución:

a. **J** justificar hechos por su tradición. **i** ser inofensivo. **r** ser respetuoso con los seres vivos. **m** ser respetuoso con el medio ambiente. **p** tener problemas. **b** ser bárbaro. **d** ser digno de nuestro tiempo.

$j \rightarrow ((i \ \& \ m) \rightarrow \neg p) \ \& \ ((b \vee \neg(r \vee m)) \rightarrow (\neg j \vee \neg d))$

## TIPOS DE DEDUCCIÓN O REGLAS DE INFERENCIA

### La deducción directa

Un **argumento** es un conjunto de enunciados o proposiciones entre los cuales una proposición final, llamada conclusión, se sigue de las otras proposiciones o premisas. Pues bien, llamamos **deducción** a un modo de argumentar tal que el paso de las premisas a la conclusión es necesario.

La **deducción formal o lógica** consiste en que a partir de unas premisas, representadas con símbolos, y a través de unas reglas, obtenemos una conclusión (deducimos la conclusión).

Los símbolos en la lógica de enunciados pueden ser:

**Los conectores o juntores:**  $\neg$ ,  $\&$ ,  $\vee$ ,  $\rightarrow$ ,  $\leftrightarrow$

**Letras enunciativas:** p, q, r...etc, que representan los enunciados de la argumentación.

**Símbolos auxiliares:** ( ), I- (este último signo se utiliza para indicar formalmente la conclusión):

**Ejemplo:** "si graniza (**g**) o nieva (**n**) entonces, uso paraguas (**p**) o no salgo de casa ( $\neg s$ ). Se da el caso de que graniza (**g**). Por lo tanto, no salgo de casa ( $\neg s$ )".

La formalización de este argumento es la siguiente:

$$(g \vee n) \rightarrow (p \vee \neg s), g \text{ I- } \neg s$$

Ahora bien; la deducción puede ser directa e indirecta.

Por **deducción directa** entendemos aquella en la cual, a través de las premisas, obtenemos la conclusión de un modo directo:

Ejemplo: *Si vienes pronto, podremos ir al cine. Has venido pronto. Conclusión: vamos al cine.*

Formalicémoslo:  $p \rightarrow c, p \text{ I- } c$

Ahora bien ¿Cómo se lleva a cabo la deducción formal o derivación?

El primer paso consiste en escribir las premisas iniciales con las que contamos, numerándolas y anteponiendo a la numeración un guión horizontal.

En el segundo paso, aplicando sobre las premisas las reglas de derivación que luego veremos, numeramos las derivaciones que se extraigan de ellas, pero en este caso no le antecedemos a los números que le correspondan ningún guión. El último número corresponde con la obtención de la conclusión deseada. Veámoslo:

Tomando como ejemplo la formulación anterior, tendremos que derivar  $c$  (la conclusión), de las premisas  $p \rightarrow c$  y  $c$

-1  $p \rightarrow c$   
-2  $p$   
3  $c$  MP 1,2

Las letras que siguen a la línea de derivación tres se corresponden con las iniciales de la regla de cálculo utilizada, en este caso, el **Modus Ponens**: dada una implicación cualquiera, si se da el antecedente, entonces necesariamente podemos inferir el consecuente (esto se verá en el próximo capítulo). La numeración que sigue al nombre de la regla se refiere a las líneas sobre las que se ha aplicado dicha regla .

Derivemos la siguiente fórmula utilizando el Modus Ponens:  $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ ,  $p \rightarrow q$ ,  $p$  I-  
 $r$

- 1  $p \rightarrow (q \rightarrow r)$   
- 2  $p \rightarrow q$   
- 3  $p$   
4  $q \rightarrow r$  MP 1,3  
5  $q$  MP 2,3  
6  $r$  MP 4,5

## La deducción indirecta o reducción al absurdo ( reductio ad absurdum)

En este tipo de deducción obtenemos la conclusión de modo indirecto, negando la misma conclusión hasta llegar a una contradicción.

Los pasos de la reducción al absurdo son los siguientes:

1. Suponemos hipotéticamente la falsedad de la conclusión:  $\neg p$
2. Esta suposición nos conduce a una contradicción:  $(q \ \& \ \neg q)$
3. Negamos, por lo tanto, la falsedad de la suposición:  $\neg(\neg p)$
4. Afirmamos la conclusión deseada:  $p$

Antes de realizar un ejemplo concreto sobre la reducción al absurdo conviene que veamos las reglas en las que se fundamenta la deducción: las llamadas **reglas de inferencia**.

## EJERCICIOS: FORMALIZACIÓN Y RESOLUCIÓN

### 1. Formaliza y resuelve los siguientes argumentos:

**a.** Si acepto este trabajo o dejo de pintar por falta de tiempo, entonces no realizaré mis sueños.

He aceptado el trabajo y he dejado de pintar. Por lo tanto, no realizaré mis sueños.

**b.** Si vamos a Asia, entonces llegaremos hasta la India. Si vamos a Asia entonces, si llegamos hasta la India visitaremos Varanasi. Si vamos a India entonces, si visitamos Varanasi podremos ver el Ganges. Por lo tanto, si vamos a Asia veremos el Ganges.

**a.** **t** aceptar el trabajo. **p** dejar de pintar. **s** alejarse de los sueños.

**( t V p ) -> s, ( t & p ) |- s**

**Deducción:**

-1 ( t V p ) -> s

-2 t & p

3 t EC 2

4 t V p ID 3

5 s MP 1,4

**b. a -> i, a -> ( i ->v ), i -> ( v -> g ) |- a ->g**

-1 a -> i

-2 a -> ( i ->v )

-3 i -> ( v ->g )

4 a

5 i MP 1,4

6 v ->g MP 3,5

7 i ->v MP 2,4

8 v MP 7,5

9 g MP 6,8

10 a->g II 4,9

\*Las líneas azules indican que se trata de un supuesto

**c .Formalizar, derivar y confeccionar la tabla de verdad del siguiente argumento. Utiliza la  $P \rightarrow ((Q \rightarrow R) \& (\sim S \vee R))$  para realizar este ejercicio.**

Todo número entero o es primo o es compuesto. Si es compuesto, es un producto de factores primos, y si es un producto de factores primos, entonces es divisible por ellos. Pero si un número entero es primo, no es compuesto, aunque es divisible por sí mismo y por la unidad, y consiguientemente, también divisible por números primos. Por tanto, todo número entero es divisible por números primos.

## VALORES DE VERDAD DE LOS ENUNCIADOS. LAS TABLAS DE VERDAD.

### 1. valores de verdad de los enunciados.

- **La conjunción:**

Una conjunción  $p \& q$  es verdadera cuando todos sus elementos son verdaderos y es falsa cuando alguno de sus elementos o todos ellos sean falsos.

**La representación de los valores de verdad de la conjunción :**

<b>p q</b>	<b>p &amp; q</b>
1 1	1
1 0	0
0 1	0
0 0	0

- **La disyunción:**

Una disyunción  $p \vee q$  es verdadera cuando por lo menos uno de sus elementos

es verdadero y es falsa cuando todos sus elementos son falsos.

**La tabla de verdad de la disyunción es:**

<b>p q</b>	<b>p V q</b>
1 1	1
1 0	1
0 1	1
0 0	0

- **La implicación:**

Una implicación  $p \rightarrow q$  es verdadera siempre que no se de el caso de que su antecedente  $p$  sea verdadero y su consecuente  $q$  falso.

**La tabla de verdad de la implicación es la siguiente:**

<b>p q</b>	<b>p <math>\rightarrow</math> q</b>
1 1	1
1 0	0
0 1	1
0 0	1

- **El bicondicional o coimplicador**

Una coimplicación  $p \leftrightarrow q$  es verdadera cuando sus elementos ( $p$  y  $q$ ) tengan el mismo valor de verdad, es decir, sean los dos verdaderos o los dos falsos.

**Su representación es la siguiente:**

<b>p q</b>	<b>p <math>\leftrightarrow</math> q</b>
1 1	1
1 0	0
0 1	0
0 0	1

- **La negación.**

Dado cualquier enunciado verdadero  $p$ , su negación  $\neg p$  será falsa. Y si un enunciado es falso, su negación será verdadera.

**La tabla de verdad de la negación puede representarse como sigue :**

<b>p</b>	<b><math>\neg p</math></b>
1	0
0	1

### 3. Confección de las tablas de verdad para cualquier fórmula u argumento.

Si podemos determinar el valor de verdad de cada enunciado atómico, podremos saber qué valor de verdad tendrá un enunciado molecular o un conjunto de enunciados moleculares.

Podemos construir una tabla de verdad de cualquier fórmula de lógica de enunciados. Para ello, tendremos que seguir los siguientes pasos:

1. calcular el número de filas que tendrá la tabla. Este será equivalente a 2 elevado al número de variables que tenga la fórmula (  $2^n$  donde **n** representa el número de variables que intervienen). Ejemplo: calculemos el número de filas que tendrá la fórmula **p & (q V r) -> ( p & q) V ( p & r )**. Tenemos tres variables, luego el número será igual a  $2^3$ , es decir, 8 filas.

2 .Después detallaremos la columna inicial, que incluirá todos los posibles valores de verdad que puedan darse entre los elementos de la fórmula.

<b>p</b>	<b>q</b>	<b>r</b>
1	1	1
1	1	0
1	0	1
1	0	0
0	1	1
0	1	0
0	0	1
0	0	0

3. Una vez hecho ésto hay que confeccionar las columnas intermedias, empezando por los componentes principales e internos, hasta abarcar la conexión completa de todos sus elementos. Sea la fórmula:

$$p \ \& \ (q \vee r) \rightarrow (p \ \& \ q) \vee (p \ \& \ r)$$

Utilizaremos el metalenguaje para denominar a los distintos elementos de la fórmula. LLamaremos **A** a  $p \ \& \ (q \vee r)$  y **B** a  $(p \ \& \ q) \vee (p \ \& \ r)$  . Con lo cual, el esquema de la fórmula queda como sigue: **A  $\rightarrow$  B**

<b>p</b>	<b>q</b>	<b>r</b>	<b>q <math>\vee</math> r</b>	<b>A</b>	<b>p <math>\&amp;</math> q</b>	<b>p <math>\&amp;</math> r</b>	<b>B</b>	<b>A <math>\rightarrow</math> B</b>
1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1	1
1	0	1	1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0	1
0	1	1	1	0	0	0	0	1
0	1	0	1	0	0	0	0	1
0	0	1	1	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	1

4. En la columna final se resuelve la fórmula total **A  $\rightarrow$  B**

#### 4. Tautologías, contradicciones y contingencias.

Dependiendo de los valores de verdad que obtengamos en la columna final podrán suceder tres cosas:

1. Que todos los valores sean verdaderos (1), y a la fórmula la llamaremos **tautología**. Esto quiere decir que la fórmula es verdadera en todos los casos, independientemente de los valores de verdad que le atribuyamos.

2. Que todos los valores de la columna final sean falsos (0), en cuyo caso nos encontramos con una **contradicción**. Una fórmula contradictoria es aquella que no es

verdadera en ningún caso, porque no es satisficible con ninguna atribución de verdad.

3. Que los valores de la columna final sean verdaderos (1) y falsos (0), en cuyo caso nos encontramos con una **contingencia**. En una contingencia existen valores de verdad que satisfacen la fórmula y otros que no la satisfacen.

## EJERCICIOS: TABLAS DE VERDAD

1. Formaliza las siguientes proposiciones y confecciona su tabla de verdad:

a. O estás seguro y lo que dices es cierto o mientes como un bellaco.

a. s estar seguro. d decir la verdad. m mentir como un bellaco.

**( s & d ) V m**

**TABLA DE VERDAD:**

s d m	s & d	( s & d ) V m
1 1 1	1	1
1 1 0	1	1
1 0 1	0	1
1 0 0	0	0
0 1 1	0	1
0 1 0	0	0
0 0 1	0	1
0 0 0	0	0

2. Formaliza la siguiente proposición.  $P \rightarrow ((Q \rightarrow R) \wedge (\sim S \vee R))$

**Tabla de verdad detallada de „ $P \rightarrow ((Q \rightarrow R) \wedge (\sim S \vee R))$ ”**

P	Q	R	S		P	→	((Q	→	R)	&	(~S	∨	R)
1	1	1	1		*1		1		1		0		1
1	1	1	0		*1		1		1		1		1

1	1	0	1		*0	0	0	0	0
1	1	0	0		*0	0	0	1	1
1	0	1	1		*1	1	1	0	1
1	0	1	0		*1	1	1	1	1
1	0	0	1		*0	1	0	0	0
1	0	0	0		*1	1	1	1	1
0	1	1	1		*1	1	1	0	1
0	1	1	0		*1	1	1	1	1
0	1	0	1		*1	0	0	0	0
0	1	0	0		*1	0	0	1	1
0	0	1	1		*1	1	1	0	1
0	0	1	0		*1	1	1	1	1
0	0	0	1		*1	1	0	0	0
0	0	0	0		*1	1	1	1	1

a. Si un animal fabuloso se enfada, te quedas paralizado del susto si te quedas paralizado del susto, entonces no puedes sino apelar a su bondad y así no ser engullido. Por lo tanto, si un animal fabuloso se enfada, tendrás que apelar a su bondad o serás engullido.

¿Cuántas variables tiene la tabla? ¿Es una tautología?

### 3. $P \rightarrow ((Q \rightarrow R) \& (\sim S \vee R))$

#### Tabla de verdad detallada de „ $P \rightarrow ((Q \rightarrow R) \& (\sim S \vee R))$ “

P	Q	R	S		P	→	((Q	→	R)	&	(~S	∨	R)	)
1	1	1	1		*1		1		1	0	1			
1	1	1	0		*1		1		1	1	1			
1	1	0	1		*0		0		0	0	0			
1	1	0	0		*0		0		0	1	1			
1	0	1	1		*1		1		1	0	1			
1	0	1	0		*1		1		1	1	1			
1	0	0	1		*0		1		0	0	0			
1	0	0	0		*1		1		1	1	1			
0	1	1	1		*1		1		1	0	1			
0	1	1	0		*1		1		1	1	1			
0	1	0	1		*1		0		0	0	0			
0	1	0	0		*1		0		0	1	1			
0	0	1	1		*1		1		1	0	1			
0	0	1	0		*1		1		1	1	1			
0	0	0	1		*1		1		0	0	0			
0	0	0	0		*1		1		1	1	1			

a. Confeccione las tablas de verdad de las siguientes proposiciones. ¿Son tautologías? ¿Pueden ser probadas?

Si no está familiarizado con la aplicación de lógica, lea detenidamente [la ayuda](#) sobre este programa.

$$(a \& b) \rightarrow (\sim(\sim a \vee \sim b))$$

$$(a \rightarrow b) \leftrightarrow (\sim(a \& \sim b))$$

$$(a \vee b) \rightarrow (\sim(\sim a \& \sim b))$$

## REGLAS ELEMENTALES DEL CÁLCULO DE JUNTORES

### Noción de regla.

Denominamos reglas de inferencia a aquellas operaciones que deben realizarse a fin de obtener una conclusión correcta a partir de unas premisas dadas. El uso de las reglas garantizan la validez de la inferencia.

Son ocho las reglas elementales, dos por cada conector ( o juntor ).

### 1. reglas básicas de la conjunción

- **Regla de introducción del conjuntor ( IC ) o ( Prod )**

Dada la afirmación de dos proposiciones ( A , B ) podemos afirmar la conjunción de ambas ( A & B ).

Esta regla es evidente: si decimos que el gato es siamés ( A ) y afirmamos también que tiene los ojos azules ( B ), podemos afirmar la conjunción de ambas proposiciones "el gato es siamés y tiene los ojos azules" ( A & B ).

**El esquema de la regla de introducción del conjuntor ( IC ) es el siguiente:**

$$\frac{A \\ B}{A \& B}$$

- **Regla de eliminación del conjuntor ( EC ) o ( Simp )**

Dada una conjunción , podemos afirmar cualquiera de sus miembros por separado. Así en la conjunción : *el gato es siamés* ( A ) y ( & ) *el perro tiene los ojos verdes* ( B ), podemos afirmar sólomente *el gato es siamés* ( A ) o *el perro tiene los ojos verdes* ( B ).

**El esquema de la regla de eliminación del conjuntor ( EC ) es:**

$$\text{EC}_1 \quad \frac{\text{A \& B}}{\text{A}} \quad \text{EC}_2 \quad \frac{\text{A \& B}}{\text{B}}$$

## 2. Reglas básicas de la disyunción.

- **Regla de introducción del disyuntor ( ID ) o ( Ad )**

Dado un enunciado o fórmula cualquiera, es posible añadirle cualquier otro enunciado mediante una disyunción. Sea cual sea el valor de verdad de la primera, nada se modifica.

El esquema de la regla de introducción del disyuntor( ID ) es:

- $$\text{ID}_1 \frac{A}{A \vee B} \quad \text{ID}_2 \frac{B}{A \vee B} \quad \text{Regla de eliminación del disyuntor ( ED ) o ( Cas )}$$

Dada una disyunción (  $A \vee B$  ) si del primer término inferimos otro (  $C$  ) y del segundo término volvemos a inferir ese otro (  $C$  ), se puede afirmar  $C$ .

Ahora bien, como no se puede establecer la afirmación de ninguno de los términos de una disyunción, sino sólo suponer que se da uno u otro, cuando inferimos  $C$ , los términos de la disyunción deben ser cancelados.

Las suposiciones de los términos deben ir precedidas por un guión vertical que incluya horizontalmente, todos las líneas inferidas a partir de la suposición.

$$\begin{array}{l} A \vee B \\ \left[ \begin{array}{l} A \\ \vdots \\ C \end{array} \right] \\ \left[ \begin{array}{l} B \\ \vdots \\ C \end{array} \right] \\ \hline C \end{array}$$

( Cas )

## 3. Reglas básicas del implicador

- **Regla de introducción del implicador ( II )**

Si a partir de una proposición se sigue otra cualquiera, podemos afirmar una implicación de ambas, siendo la primera proposición el antecedente de la hipótesis obtenida, que hace de consecuente.

El esquema de la regla de introducción del implicador ( II ) es:

$$\frac{\begin{array}{|l} A \\ \vdots \\ B \end{array}}{A \rightarrow B}$$

- (II) **Regla de eliminación del implicador (EI) o Modus Ponens (MP)**

Dada una implicación cualquiera, si suponemos el término que hace de antecedente en dicha fórmula, podemos afirmar independientemente el término que hace de consecuente en dicha implicación.

El esquema de esta regla es:

$$\frac{A \rightarrow B \quad A}{B}$$

#### 4. Reglas básicas de la negación

- **Regla de introducción de la negación (IN)**

Si de una proposición cualquiera ( A ) se sigue una contradicción ( B & ¬B ), la proposición ha de ser negada ( ¬A ).

El esquema de esta regla es el siguiente:

$$\frac{\begin{array}{|l} A \\ \vdots \\ B \& \neg B \end{array}}{\neg A}$$

- **Regla de eliminación de la negación (EN) o doble negación (DN)**

La doble negación de una fórmula equivale a su afirmación. Esta regla es evidente: decir que no es cierto que el coche no es azul ( ¬¬A ), significa que efectivamente lo es ( A ).

El esquema de la regla es el que sigue:

$$\frac{\neg \neg A}{A}$$

#### EJERCICIOS: FORMALIZACIÓN Y RESOLUCIÓN

## 1. Formaliza y resuelve los siguientes argumentos:

**a.** Si acepto este trabajo o dejo de pintar por falta de tiempo, entonces no realizaré mis sueños.

He aceptado el trabajo y he dejado de pintar. Por lo tanto, no realizaré mis sueños.

**b.** Si vamos a Asia, entonces llegaremos hasta la India. Si vamos a Asia entonces, si llegamos hasta la India visitaremos Varanasi. Si vamos a India entonces, si visitamos Varanasi podremos ver el Ganges. Por lo tanto, si vamos a Asia veremos el Ganges.

**a.** **t** aceptar el trabajo. **p** dejar de pintar. **s** alejarse de los sueños.

**( t V p ) -> s, ( t & p ) |- s**

**Deducción:**

-1 ( t V p ) -> s

-2 t & p

3 t EC 2

4 t V p ID 3

5 s MP 1,4

**b. a -> i, a -> ( i ->v ), i -> ( v -> g ) |- a ->g**

-1 a -> i

-2 a -> ( i ->v )

-3 i -> ( v ->g )

4 a

5 i MP 1,4

6 v ->g MP 3,5

7 i ->v MP 2,4

8 v MP 7,5

9 g MP 6,8

10 a->g II 4,9

\*Las líneas azules indican que se trata de un supuesto

**c .Formalizar, derivar y confeccionar la tabla de verdad del siguiente argumento.**

$$P \rightarrow ((Q \rightarrow R) \& (\sim S \vee R))$$

**Tabla de verdad detallada de „ $P \rightarrow ((Q \rightarrow R) \& (\sim S \vee R))$ “**

P	Q	R	S		P	$\rightarrow$	((Q	$\rightarrow$	R)	&	( $\sim$ S	$\vee$	R)
-----													
1	1	1	1		*1		1		1	0	1		
1	1	1	0		*1		1		1	1	1		
1	1	0	1		*0		0		0	0	0		
1	1	0	0		*0		0		0	1	1		
1	0	1	1		*1		1		1	0	1		
1	0	1	0		*1		1		1	1	1		
1	0	0	1		*0		1		0	0	0		
1	0	0	0		*1		1		1	1	1		
0	1	1	1		*1		1		1	0	1		
0	1	1	0		*1		1		1	1	1		
0	1	0	1		*1		0		0	0	0		
0	1	0	0		*1		0		0	1	1		
0	0	1	1		*1		1		1	0	1		
0	0	1	0		*1		1		1	1	1		
0	0	0	1		*1		1		0	0	0		
0	0	0	0		*1		1		1	1	1		

Todo número entero o es primo o es compuesto. Si es compuesto, es un producto de factores primos, y si es un producto de factores primos, entonces es divisible por ellos. Pero si un número entero es primo, no es compuesto, aunque es divisible por sí mismo y por la unidad, y consiguientemente, también divisible por números primos. Por tanto, todo número entero es divisible por números primos.

# REGLAS DERIVADAS DEL CÁLCULO DE JUNTORES

## Las reglas derivadas.

Son aquellas que están fundamentadas en las reglas básicas o elementales, y que nos permiten agilizar el proceso deductivo.

Las reglas derivadas pueden ser agrupadas según sus conectores o juntores: conjunción, disyunción, implicación y negación.

## 1. reglas derivadas de la conjunción

- Propiedad conmutativa de la conjunción ( CC )

$$\frac{A \& B}{B \& A}$$

La doble línea indica que el proceso es igualmente válido a la inversa, es decir, que si tenemos la conjunción B & A, podemos afirmar también A & B.

- Propiedad asociativa de la conjunción ( AC )

$$\frac{(A \& B) \& C}{A \& (B \& C)}$$

- Propiedad distributiva de la conjunción ( DC )

$$\frac{A \& (B \vee C)}{(A \& B) \vee (A \& C)}$$

- Idempotencia de la conjunción ( IdC )

$$\frac{A \& A}{A}$$

- Absorción de la conjunción ( AbsC )

$$\frac{A \& (A \vee B)}{A}$$

- Definición de la conjunción ( DfC1 y DfC2 )

$$\frac{A \& B}{\neg (A \rightarrow \neg B)} \quad \frac{A \& B}{\neg (\neg A \vee \neg B)}$$

## 2. Reglas derivadas de la disyunción

- Propiedad conmutativa de la disyunción ( CD )

$$\frac{A \vee B}{B \vee A}$$

- Propiedad asociativa de la disyunción ( AD )

$$\frac{(A \vee B) \vee C}{A \vee (B \vee C)}$$

- Propiedad distributiva de la disyunción ( DD )

$$\frac{A \vee (B \vee C)}{(A \vee B) \& (A \vee C)}$$

- Idempotencia de la disyunción ( IdD )

$$\frac{A \vee A}{A}$$

- Absorción de la disyunción ( AbsD )

$$\frac{A \vee (A \& B)}{A}$$

- Absorción de la disyunción ( AbsD )

$$\frac{A \vee B}{\frac{-B}{A}} \quad \frac{A \vee B}{\frac{-A}{B}}$$

- Absorción de la disyunción ( AbsD )

$$\frac{A \vee B}{\frac{A \rightarrow C}{B \rightarrow C}} \quad \frac{-A \vee -B}{\frac{C \rightarrow A}{C \rightarrow B}} \quad \frac{A \vee B}{\frac{A \rightarrow C}{B \rightarrow D}} \quad \frac{-A \vee -B}{\frac{C \rightarrow A}{D \rightarrow B}}$$

$$\frac{C}{-C} \quad \frac{C \vee D}{-C \vee -D}$$

- Definición de disyunción ( DfD )

$$\frac{A \vee B}{\neg A \rightarrow B} \quad \frac{A \vee B}{\neg (\neg A \& \neg B)}$$

#### 4. Reglas derivadas de la negación

- Regla de introducción de la doble negación ( IDN )

$$\frac{A}{\neg\neg A} \quad \text{Ex contradictione quodlibet ( EQL )}$$

$$\frac{A \& \neg A}{B} \quad \text{Contraposición ( Cp )}$$

$$\frac{A \rightarrow B}{\neg B \rightarrow \neg A}$$

- Modus tollens ( MT)

$$\frac{A \rightarrow B \quad \neg B}{\neg A}$$

- Principio de no contradicción ( PNC )

$$\neg ( A \& \neg A )$$

- Principio de exclusión de tercero ( PTE )

$$A \vee \neg A$$

- Leyes de De Morgan ( DM1 y DM2 )

$$\frac{\neg(A \& B)}{\neg A \vee \neg B} \quad \frac{\neg(A \vee B)}{\neg A \& \neg B}$$

#### 4. Reglas derivadas de la implicación

- Silogismo hipotético ( Sil )

$$\frac{\begin{array}{l} A \rightarrow B \\ B \rightarrow C \end{array}}{A \rightarrow C} \quad \text{Mutación de premisas ( Mut )}$$

$$\frac{A \rightarrow (B \rightarrow C)}{B \rightarrow (A \rightarrow C)} \quad \text{Carga de premisa ( Cpr )}$$

$$\frac{A}{B \rightarrow A}$$

- Definición de implicador ( DI1 y DI2 )

$$\frac{A \rightarrow B}{\neg(A \& \neg B)} \quad \frac{A \rightarrow B}{\neg A \vee B}$$

#### 4. Reglas derivadas de coimplicación

- Introducción del coimplicador ( ICO)

$$\frac{\begin{array}{l} A \rightarrow B \\ B \rightarrow A \end{array}}{A \leftrightarrow B} \quad \text{Eliminación del coimplicador ( ECO1 y ECO2 )}$$

$$\frac{A \leftrightarrow B}{A \rightarrow B} \quad \frac{A \leftrightarrow B}{B \rightarrow A}$$

## EJERCICIOS: DERIVACIÓN

### 1. Formaliza y resuelve los siguientes argumentos utilizando las reglas básicas y derivadas:

a. Si me dices que nunca has hecho mal mientes y, si mientes, eres malo.  
Si me dices que has hecho mal, eres malo y, si eres malo, no eres totalmente ético por haber sido malo.  
Digas lo que digas, no eres totalmente ético.

a. Si me dices que nunca has hecho mal (N) mientes (M) y, si mientes (M) , eres malo (E).  
Si me dices que has hecho mal (S), eres malo (E) y, si eres malo (E) , no eres totalmente ético (C) por haber sido malo. Digas lo que digas, no eres totalmente ético (C).  
 $(N \rightarrow M) \& (M \rightarrow E), (S \rightarrow E) \& (E \rightarrow C) \vdash (N \vee S) \rightarrow C$

-1  $(N \rightarrow M) \& (M \rightarrow E)$

-2  $(S \rightarrow E) \& (E \rightarrow C)$

3  $N \vee S$

4  $E \rightarrow C$  EC2

5 S ED3

6  $S \rightarrow E$  EC2

7 E MP 5,6

8 C MP 4,7

9 N ED3

10  $N \rightarrow M$  EC1

11 M MP9,10

12  $M \rightarrow E$  EC1

13 E MP 11,12

14 C MP 4,13

15 C Cas.5-8,9-14

16 (N V S)  $\rightarrow$  C II 3,15

**b.**  $(p \vee q) \rightarrow r, r \rightarrow (s \vee t), t \rightarrow u, \neg s \ \& \ \neg u \mid - \neg q$

**b.**  $(p \vee q) \rightarrow r, r \rightarrow (s \vee t), t \rightarrow u, \neg s \ \& \ \neg u \mid - \neg q$

-1  $(p \vee q) \rightarrow r$

-2  $r \rightarrow (s \vee t)$

-3  $t \rightarrow u$

-4  $\neg s \ \& \ \neg u$

5  $q$

6  $(p \vee q) \rightarrow (s \vee t)$  SIL 1,2

7  $p \vee q$  ID 5

8  $s \vee t$  MP 6,7

9  $\neg s$  EC 4

10  $t$  SD 8,9

11  $\neg u$  EC 4

12  $\neg t$  MT 3,11

13  $t \ \& \ \neg t$  IC 10,12

14  $C$  MP 4,13

15  $\neg q$  ABS 5-14

# TABLAS SEMÁNTICAS O ÁRBOLES LÓGICOS

## Las tablas semánticas:

Hemos visto que las deducciones pueden hacerse atendiendo a los problemas de derivación, realizándose esta última a través de la aplicación de las reglas básicas o derivadas.

Pero también podemos utilizar otro criterio: **el semántico**, según el cual, y suponiendo que la deducción sea correcta, no podemos obtener una conclusión falsa de premisas verdaderas. La semántica atiende por una parte al hecho al que se refiere la proposición y, por otra parte, a su valor de verdad.

El método de las tablas semánticas supone una búsqueda de contraejemplos que invaliden el argumento. Es una especie de reducción al absurdo, en la que se supone la verdad de la negación de la conclusión y, a partir de ella, se llega a una contradicción. Veámoslo.

## REGLAS SEMÁNTICAS

La búsqueda de **contraejemplos** que invaliden la argumentación se realiza a través de la aplicación de una serie de reglas que tienen bastante parecido con las reglas básicas del cálculo de junciores.

Estas reglas son las siguientes:

- **Regla de negación:**

### Doble negación (DN)

Siempre que tengamos una doble negación podemos inferir la afirmación de dicho término:

$$\frac{\neg\neg A}{A} \quad \text{Reglas de la implicación:}$$

### verdad de la implicación (VI):

Siempre que se nos de una implicación podremos afirmar separadamente que su antecedente es falso o su consecuente es verdadero:

$$\frac{A \rightarrow B}{\neg A \mid B}$$

La barra vertical que separa a  $\neg A$  de  $B$  implica la existencia de una bifurcación en la derivación, puesto que pueden darse varias posibilidades de las cuales, al menos una, ha de ser verdadera (o

## Falsedad de la implicación (FI)

Una implicación es falsa cuando su antecedente es verdadero y su consecuente falso:

$$\frac{\neg(A \rightarrow B)}{A \quad \neg B}$$

- **Reglas de la conjunción:**

## Verdad de la conjunción (VD)

Una conjunción es verdadera si todos sus términos son verdaderos:

$$\frac{A \& B}{A \quad B}$$

## Falsedad de la conjunción (FC)

Una conjunción es falsa si es falso alguno de sus términos:

$$\frac{\neg(A \& B)}{\neg A \mid \neg B}$$

- **Reglas de la disyunción:**

## Verdad de la disyunción (VD)

Una disyunción es verdadera cuando al menos uno de sus dos términos es verdadero:

$$\frac{A \vee B}{A \mid B}$$

## Falsedad de la disyunción:

Una disyunción es falsa cuando todos sus términos son falsos:

$$\frac{\neg(A \vee B)}{\neg A \quad \neg B}$$

## DEDUCCIONES SEMANTICAS

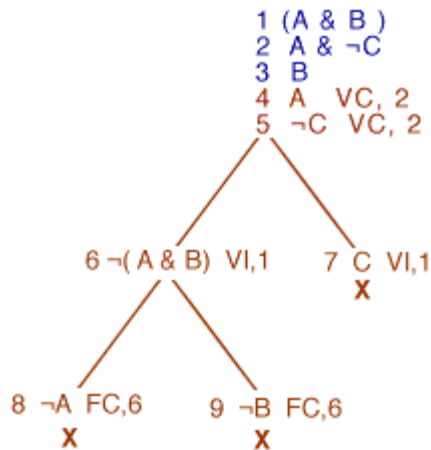
Supongamos que tenemos el siguiente argumento:  $(A \ \& \ B) \rightarrow C, A \ \& \ \neg C \ \vdash \ \neg B$

Queremos demostrar la conclusión  $\neg B$  siguiendo el método de las tablas semánticas o árboles lógicos.

Empezamos por negar la conclusión: B

Después, mediante las reglas dadas anteriormente, voy simplificando todas las premisas hasta llegar a todas las contradicciones posibles. Cada bifurcación, que representa una posibilidad, debe llegar a una contradicción para que la conclusión buscada sea verdadera.

Por regla general se simplifican primero las premisas que no se bifurcan y luego las que se bifurcan:



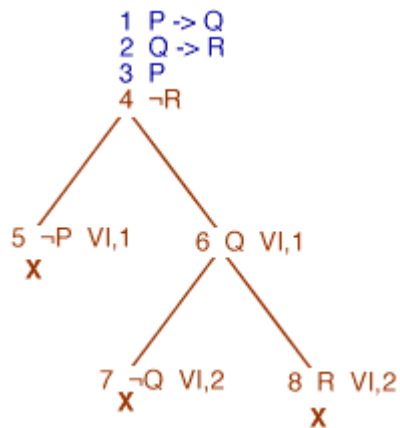
Las cruces indican que se ha llegado a una contradicción. Queda demostrado, por lo tanto, que  $\neg B$  es verdadero, ya que negando éste, todas las simplificaciones de las premisas llevan a una contradicción. La conclusión  $\neg B$  será falsa cuando alguna bifurcación quede abierta.

## EJERCICIOS: Árboles lógicos

### 1. formaliza la siguiente oración y construye su árbol lógico:

a. No llueve si salgo de casa sin paraguas. Cuando no llueve, me apetece dar un largo paseo por el campo. He salido sin paraguas. Luego, daré un largo paseo.

b.  $(p \rightarrow Q) \& (Q \rightarrow R), P \vdash R$



1. Si el animal fabuloso que vive en tus sueños se nos aparece en plena calle, entonces probablemente nos suceda algo chistoso. Siempre que nos topamos con un venusiano, podremos estar seguros de tener mala suerte. El animal que vive en nuestros sueños se nos aparece en plena calle o nos topamos con un venusiano. Por lo tanto, sucederá algo chistoso o tendremos mala suerte.

2. O no dices la verdad o no puedes querer convencerme de que los hipopótamos trepan a los árboles. Cuando no bromeas, dices la verdad. Si estás de guasa puedes querer convencerme de que los hipopótamos trepan a los árboles. Conclusión: o bromeas, o no estás de guasa.